基于 IVHFWHM 算子的犹豫关联多属性决策方法 *

张　颖，燕轶纯

(中南大学 商学院，长沙 410083)

摘　要：针对决策属性为区间犹豫模糊数(IVHFN)且属性间相互关联的多属性决策(MADM)问题，提出一种基于区间犹豫模糊加权 Heronian 平均(IVHFWHM)算子的新型决策方法。基于 IVHFN 运算法则和 Heronian 平均(HM)算子，提出区间犹豫模糊 Heronian 平均(IVHFHM)算子和 IVHFWHM 算子。研究了 IVHFHM 算子的置换不变性、幂等性、单调性、有界性和参数对称性等性质。建立基于 IVHFWHM 算子的多属性决策模型，通过 MADM 数值实验验证了模型的可行性与有效性。

关键词：区间犹豫模糊数；Heronian 平均算子；区间犹豫模糊加权 Heronian 平均算子；多属性决策

中图分类号：TP391

Hesitant multi-attribute association decision making method based on IVHFWHM operator

Zhang Ying, Yan Yichun

(*Business School*, *Central South University*, *Changsha* 410083, *China*)

Abstract: With respect to the problems of Multiple Attribute Decision-Making in which the attribute values are in the form of interval-valued Hesitant fuzzy numbers（IVHFN）and attributes are associated with each other. A novel decision-making method based on interval-valued Hesitant fuzzy weighted Heronian mean(IVHFWHM) operator is proposed. According to the IVHFN's operational laws and Heronian Mean(HM) operator, interval-valued Hesitant fuzzy Heronian mean(IVHFHM) operator and IVHFWHM operator are proposed. Then, the IVHFHM's properties of permutation invariance, idempotent, monotonicity, boundedness and parameter symmetry are studied. A multiple attribute decision-making model based on IVHFWHM operator is constructed. Finally, A numerical example of MADM problem is provided to illustrate the effectiveness and feasibility of the proposed operator.

Key Words: interval-valued hesitant fuzzy numbers; Heronian mean operator; interval-valued fesitant fuzzy weighted Heronian mean operator; multiple attribute decision-making

0　引言

社会信息化的快速发展,促使 MADM 问题的复杂度快速提升,加之人们对 MADM 问题认知的模糊性及问题自身的不确定性,故决策属性值多用模糊信息来体现。因决策者思维的复杂性,其给出的决策信息呈现出复杂的关联关系。近年来直觉模糊集(IFS)理论的发展很好的解决了多属性决策问题(MADM)中的模糊性,不确定性及属性间的关联性。Torra[1]和 Narukawa[2]用精确数刻画 IFS 的隶属度,将 IFS 扩展为犹豫模糊集(HFS),并研究了 HFS 与 IFS 之间的区别与联系。目前的方法是假定 HFS 的隶属度是一个可能的精确和清晰值。然而,在很多情况下,因属性的复杂性和决策者认知程度的局限性和偏好,决策信息通常是不确定的或模糊的。因此隶属度为精确值或者清晰值难以模拟真实的决策问题,事实上,包括偏好信息在内的人类决策表述允许隶属度具有一组可能的区间数。因此将区间数引入 HFS 后形成的 IVHFS 的研究具有重要的理论和现实意义。目前多数的 MADM 问题的研究仅仅建立在属性相互独立的情况下,然而在决策应用中,属性之间往往并非相互独立,而或多或少存在着相互关联关系,因此研究决策信息间相互关联关系的集成方法具有重要的现实背景和理论意义。Chen 等人[3]用[0,1]上的区间数表示 HFS 的隶属度,提出了 IVHFS 概念并研究了 IVHF 偏好关系的 MADM 方法。众学者对 IVHFS 融合算子的研究较高关注。文献[3]研究了 IVHFWA 算子、IVHFWG 算子、GIVHFWA 算子、GIVHFWG 算子、IVHFOWA 算子、IVHFOWG 算子、GIVHFOWA 算子、GIVHFOWG 算子等及相关性质 Wei[4]等将 HFS 与区间数相结合,研究了犹豫区间模糊相关的信息集结算子,如 HIVFWA 算子、HIVFOWA 算子、HIVFWG 算子、HIVFOWG 算子、HIVFFCOA 算子、HIVFCOG 算子,并证明了

基金项目：中南大学硕士研究生创新创业计划项目（2017175）

作者简介：张颖（1968-），男，湖南长沙人，教授，博士，主要研究方向为智能决策方法、信息算子融合（zhangying_zn@163.com）；燕轶纯（1993-），女，硕士研究生，主要研究方向为智能决策方法、信息算子融合.

算子的幂等性、单调性、有界性和置换不变性等性质。于倩等人[5]将 IVHFS 与传统的 ELECTRE 方法相结合研究了基于区间犹豫模糊 ELECTRE 的 MADM 方法。

上述研究的 IVHFS 集结算子均假定属性间相互独立,因 MADM 问题中,属性间往往会或多或少的存在着相互关联关系。因此研究决策信息间相互关联关系的集成方法具有重要的现实背景和理论意义。基于 HM 算子[6-12]能较好地处理属性间相关联的信息融合算子。Beliakov 等人 [7]在不等式领域很好地证明 HM 算子的性质。Sykora 等人 [8-9]提出广义的 HM 算子,并研究了其两种特殊形式。Liu 等人[10]研究了 Heronian OWA 算子,在处理属性间关联特性方面与 Bonferroni 平均算子进行比较。于倩和侯福均[11]将 Heronian 平均算子应用在犹豫模糊语言环境下的 MADM 问题中,研究了 HFLHM 算子和 HFLGHM 算子及其相关性质,弥补了犹豫模糊语言信息集结算子的不足,使得决策结果更加符合实际的情况。王晓楠和巨永锋等人[12]基于 Archimedean 范数将犹豫模糊集和 HM 算子进行结合,研究了 HFHM 算子和 HFWHM 算子,并应用于交通流模型的选择。周晓辉和姚俭[13]将 HM 算子和区间直觉模糊数相结合,研究了一种基于 IVIFGWHM 算子的决策方法。林显宁[14]基于 Archimedean 范数将犹豫模糊语言集和 HM 算子进行结合,研究了 HLHGM 算子和 HLHWGM 算子。

目前,关于属性间具有关联性的 IVHFS 融合算子研究并不多见。为了更好地弥补 IVHF 环境下属性间相关联的信息算子的不足,本文分别将 IVHFS 与 HM 算子相结合,提出 IVHFHM 算子和 IVHFWHM 算子,研究了 IVHFHM 算子的置换不变性,幂等性,单调性,有界性和参数对称性等性质,建立基于 IVHFWHM 算子的 MADM 模型,该模型不仅能够有效地捕获输入变量之间的相互联系,还能使决策者依据自身的风险偏好态度选择不同的参数进行决策。最后,将 IVHFWHM 算子应用在生态环境评估算例实验中,结果证明了本文研究的算子是有效的且操作简单。

1　基础知识

1.1　IVHFS 概念

定义 1[3]　设 X 为以非空集合,称 $D=\{\langle x,g_D(x)\rangle \mid x\in X\}$ 为 X 上的区间犹豫模糊元(IVHFE)。其中 $g_D(x)=[\gamma^L,\gamma^U]$, $0\le\gamma^L\le\gamma^U\le 1$,表示元素 x 属于 D 的若干可能隶属度构成的集合。

1.2　IVHFE 运算法则

定义 2[3]　设 $h(x)=[\gamma^L,\gamma^U]$, $h_1(x)=[\gamma_1^L,\gamma_1^U]$ 和 $h_2(x)=[\gamma_2^L,\gamma_2^U]$ 为任意的三个 IVHFE, $\lambda>0$,则它们的运算法则如下:

$$h^\lambda=\bigcup_{\gamma\in h}\{[(\gamma^L)^\lambda,(\gamma^U)^\lambda]\} \tag{1}$$

$$\lambda h_1=\bigcup_{\gamma_1\in h_1}\{[1-(1-\gamma_1^L)^\lambda,1-(1-\gamma_1^U)^\lambda]\} \tag{2}$$

$$h_1\otimes h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2}\{[\gamma_1^L\gamma_2^L,\gamma_1^U\gamma_2^U]\} \tag{3}$$

$$h_1\oplus h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2}\{[\gamma_1^L+\gamma_2^L-\gamma_1^L\gamma_2^L,\gamma_1^U+\gamma_2^U-\gamma_1^U\gamma_2^U]\} \tag{4}$$

1.3　IVHFE 可能度

定义 3[16]　设任意两个 IVHFEs $h_1=[\gamma_1^L,\gamma_1^U]$, $h_2=[\gamma_2^L,\gamma_2^U]$,则 $h_1\ge h_2$ 的可能度为

$$p(h_1\ge h_2)=\max\left\{1-\max\left(\frac{\gamma_2^U-\gamma_1^L}{len(h_1)+len(h_2)},0\right),0\right\} \tag{5}$$

其中: $len(h_1)=\gamma_1^U-\gamma_1^L,len(h_2)=\gamma_2^U-\gamma_2^L$ 。

令 $p_{ij}=p(h_i\ge h_j)$,可以得到所有元素的可能度矩阵 $P=(p_{ij})_{n\times n}$,其中 $p_{ij}\ge 0,p_{ij}+p_{ji}=1$, $p_{ii}=0.5,\ i,j=1,2,\cdots,n$,通过计算可能度矩阵 P 的每一行 $p_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}$ 来对 IVHFE $h_i=[\gamma_i^L,\gamma_i^U]$ 进行排序。

1.4　IVHFE 得分函数

定义 4[3,4]　设任意一个 IVHFE h ,则 h 的得分函数为

$$S(h)=\frac{1}{\#h}\sum\nolimits_{\gamma\in h}\gamma \tag{6}$$

其中: $\#h$ 为 HTFE h 中的元素个数,对任意的 HTFE h_1 和 h_2 ,若 $S(h_1)\ge S(h_2)$,则 $h_1\ge h_2$ 。

1.5　HM 算子

在信息集成过程中,属性间往往会存在一定的联系,如互补,冗余等。由于 HM 算子不仅能捕获决策属性间的内在联系,还能够考虑到每种属性的

重要性,下面给出 HM 算子的定义。

定义 5[6~9]　设非负实数集 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,常数 $p,q\ge 0$,则 HM 算子定义如下:

$$HM^{p,q}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i\le j}^{n}a_i^p a_j^q\right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{7}$$

2　新型决策模型构建

基于 HM 能够有效地消除属性间的关联信息,针对属性值为 IVHFS 给出的且属性间存在相互关联的 MADM 问题,本节给出 IVHFHM 算子和 IVHFWHM 定义。

2.1　IVHFHM 算子

定义 6　设 $h_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组 IVHFE,且常数 $p,q>0$,则 IVHFHM 算子

$$IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)=\left(\frac{2}{n(n+1)}\left(\bigoplus_{i=1,j=i}^{n}\left((h_i)^p\otimes(h_j)^q\right)\right)\right)^{\frac{1}{p+q}} \tag{8}$$

定理 1　设 $h_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组 IVHFE,则经过 IVHFHM 算子(式(8))集成的结果仍是 IVHFE,且有

$$IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\cdots,\gamma_n\in h_n}\left\{\begin{bmatrix}\left(1-\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(1-(\gamma_i^L)^p(\gamma_j^L)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}},\\ \left(1-\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(1-(\gamma_i^U)^p(\gamma_j^U)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\end{bmatrix}\right\} \tag{9}$$

证明 由式(1)可以得到

$$(h_i)^p=\bigcup_{\gamma_i\in h_i}\left\{\left[(\gamma_i^L)^p,(\gamma_i^U)^p\right]\right\},$$

$$(h_j)^q=\bigcup_{\gamma_j\in h_j}\left\{\left[(\gamma_j^L)^q,(\gamma_j^U)^q\right]\right\}$$

由式(3)(4)进一步得到

$$\bigoplus_{i=1,j=i}^{n}\left((h_i)^p\otimes(h_j)^q\right)=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\cdots,\gamma_n\in h_n}\left\{\begin{bmatrix}1-\prod\limits_{i=1,j=i}^{n}\left(1-(\gamma_i^L)^p(\gamma_j^L)^q\right),\\ 1-\prod\limits_{i=1,j=i}^{n}\left(1-(\gamma_i^U)^p(\gamma_j^U)^q\right)\end{bmatrix}\right\}$$

通过式(2)得到

$$\frac{2}{n(n+1)}\left(\bigoplus_{i=1,j=i}^{n}\left((h_i)^p\otimes(h_j)^q\right)\right)=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\cdots,\gamma_n\in h_n}\left\{\begin{bmatrix}1-\prod\limits_{i=1,j=i}^{n}\left(1-(\gamma_i^L)^p(\gamma_j^L)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}},\\ 1-\prod\limits_{i=1,j=i}^{n}\left(1-(\gamma_i^U)^p(\gamma_j^U)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\end{bmatrix}\right\}$$

故由式(1)得到

$$IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)=\left(\frac{2}{n(n+1)}\left(\bigoplus_{i=1,j=i}^{n}\left((h_i)^p\otimes(h_j)^q\right)\right)\right)^{\frac{1}{p+q}}=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\cdots,\gamma_n\in h_n}\left\{\left[\bar{\gamma}^L,\bar{\gamma}^U\right]\right\}$$

其中:

$$\bar{\gamma}^L=1-\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-(\gamma_i^L)^p(\gamma_j^L)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$\bar{\gamma}^U=1-\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-(\gamma_i^U)^p(\gamma_j^U)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

由 IVHFE 的定义知, $0\le\gamma_i^L\le 1, 0\le\gamma_i^U\le 1$,则经过 IVHFE 的运算法则进行计算后,得到 $0\le\bar{\gamma}^L\le\bar{\gamma}^U\le 1$ 。

因此定理 1 得证

下面探讨 IVHFHM 算子的一些基本性质,主要包括幂等性,置换不变性,单调性,有界性和参数对称性。

性质 1 幂等性。设 $h_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组 IVHFE,如对任意 h_i 满足 $h_i=[\gamma_i^L,\gamma_i^U]=h=[\gamma^L,\gamma^U]$ 则有

$$IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)=h \tag{10}$$

证明

$$IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\cdots,\gamma_n\in h_n}\left\{\begin{bmatrix}1-\prod\limits_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-(\gamma_i^L)^p(\gamma_j^L)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}},\\ 1-\prod\limits_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-(\gamma_i^U)^p(\gamma_j^U)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\end{bmatrix}\right\}$$

$$\bigcup_{\gamma_1\in h,\gamma_2\in h,\cdots,\gamma_n\in h}\left\{\begin{bmatrix}1-\left(1-\gamma_i^L\right),\\ 1-\left(1-\gamma_i^U\right)\end{bmatrix}\right\}=h$$

性质 2 置换不变性。设 $h_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组 IVHFE,对 h_i 的任意一个置换 $\bar{h}_i(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$IVHFHM^{p,q}(\bar{h}_1,\bar{h}_2,\cdots,\bar{h}_n)=IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n) \tag{11}$$

证明 因为

$$IVHFHM^{p,q}(\bar{h}_1,\bar{h}_2,\cdots,\bar{h}_n)$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\cdots,\gamma_n\in h_n}\left\{\begin{bmatrix}1-\prod\limits_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-(\bar{\gamma}_i^L)^p(\bar{\gamma}_j^L)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}},\\ 1-\prod\limits_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-(\bar{\gamma}_i^U)^p(\bar{\gamma}_j^U)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\cdots,\gamma_n\in h_n}\left\{\begin{bmatrix}1-\prod\limits_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-(\gamma_i^L)^p(\gamma_j^L)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}},\\ 1-\prod\limits_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-(\gamma_i^U)^p(\gamma_j^U)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)$$

性质 3 单调性。设 IVHFE $\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$ 与 $\{\hat{h}_1,\hat{h}_2,\cdots,\hat{h}_n\}$ 且对任意 $i=1,2,\cdots,n$ 都有 $h_i\ge\hat{h}_i$,即有 $\gamma_i^L\ge\hat{\gamma}_i^L,\gamma_i^U\ge\hat{\gamma}_i^U$ 则有

$$IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)\ge IVHFHM^{p,q}(\hat{h}_1,\hat{h}_2,\cdots,\hat{h}_n) \tag{12}$$

证明 因为 $\gamma_i^L\ge\hat{\gamma}_i^L,\gamma_i^U\ge\hat{\gamma}_i^U$, $p,q>0$ 由函数单调性和 IVHFN 运算法则得到

$$\left(\gamma_i^L\right)^p\left(\gamma_j^L\right)^q\ge\left(\hat{\gamma}_i^L\right)^p\left(\hat{\gamma}_j^L\right)^q,\left(\gamma_i^U\right)^p\left(\gamma_j^U\right)^q\ge\left(\hat{\gamma}_i^U\right)^p\left(\hat{\gamma}_j^U\right)^q$$

进而得到

$$\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-\left(\gamma_i^L\right)^p\left(\gamma_j^L\right)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\le\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-\left(\hat{\gamma}_i^L\right)^p\left(\hat{\gamma}_j^L\right)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-\left(\gamma_i^U\right)^p\left(\gamma_j^U\right)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\le\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-\left(\hat{\gamma}_i^U\right)^p\left(\hat{\gamma}_j^U\right)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

从而得到

$$1-\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-\left(\gamma_i^L\right)^p\left(\gamma_j^L\right)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\ge 1-\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-\left(\hat{\gamma}_i^L\right)^p\left(\hat{\gamma}_j^L\right)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$1-\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-\left(\gamma_i^U\right)^p\left(\gamma_j^U\right)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}\ge 1-\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-\left(\hat{\gamma}_i^U\right)^p\left(\hat{\gamma}_j^U\right)^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

故 $IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)\ge IVHFHM^{p,q}(\hat{h}_1,\hat{h}_2,\cdots,\hat{h}_n)$

性质 4 有界性。设 $\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$ 为任意一组 IVHFE,对任意 $i=1,2,\cdots,n$,都有

$$h^-\le IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)\le h^+ \tag{13}$$

其中：

$$h^-=\min\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}=[\min_i\gamma_i^L,\min_i\gamma_i^U]$$

$$h^+=\max\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}=[\max_i\gamma_i^L,\max_i\gamma_i^U]$$

证明： 根据单调性性质易证有界性成立,此处略。

性质 5　参数对称性。设 $\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}$ 为任意一组 IVHFE,参数 $p>0,q>0$,对任意 $i=1,2,\cdots,n$,都有

$$IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)=IVHFHM^{q,p}(h_1,h_2,\cdots,h_n) \quad (14)$$

证明　因为

$$IVHFHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)=\left(\frac{2}{n(n+1)}\left(\bigoplus_{i=1,j=i}^{n}\left((h_i)^p\otimes(h_j)^q\right)\right)\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$=\left(\frac{2}{n(n+1)}\left(\bigoplus_{i=1,j=i}^{n}\left((h_i)^q\otimes(h_j)^p\right)\right)\right)^{\frac{1}{q+p}}=IVHFHM^{q,p}(h_1,h_2,\cdots,h_n)$$

因此式(14)得证。

2.2　IVHFWHM 算子

基于以上的研究,IVHFHM 算子能消除属性间的相互关联性,是一种新型 IVHFE 信息集成算子,但是现实的环境中,属性的不同导致权重的不同,基于此,提出 IVHFWHM 算子。

定义 7　设 $h_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组 IVHFE,且常数 $p,q\geq 0$ $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 为权重向量,则 VHFWHM 算子

$$IVHFWHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)$$
$$=\left(\frac{2}{n(n+1)}\left(\bigoplus_{i=1,j=i}^{n}\left((w_ih_i)^p\otimes(w_jh_j)^q\right)\right)\right)^{\frac{1}{p+q}} \quad (15)$$

定理 2　设 $h_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组 IVHFE，且常数 $p,q\geq 0$，$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^T$ 为 IVHFE 的权重向量,则经过 IVHFWHM 算子(式(15))集成后的结果仍是 IVHFE,且有

$$IVHFWHM^{p,q}(h_1,h_2,\cdots,h_n)=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2,\cdots,\gamma_n\in h_n}\left\{\left[\tilde{\gamma}^L,\tilde{\gamma}^U\right]\right\} \quad (16)$$

其中

$$\tilde{\gamma}^L=1-\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-((1-\gamma_i^L)^{w_i})^p((1-\gamma_j^L)^{w_j})^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

$$\tilde{\gamma}^U=1-\prod_{i=1,j=i}^{n}\left(\left(1-((1-\gamma_i^U)^{w_i})^p((1-\gamma_j^U)^{w_j})^q\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}\right)^{\frac{1}{p+q}}$$

定理 2 的证明过程类似定理 1。限于篇幅,此处略。

3　基于 IVHFWHM 算子的 MADM 模型

针对某一 MADM 问题,其中待选的方案集 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$,每个方案对应的属性集为 $\{G_1,G_2,\cdots,G_n\}$,且每一个属性对应的权重分别为 $w_k(k=1,2,\cdots,n)$。在 IVHF 环境下,决策者针对方案 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的属性 $G_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的评价信息为 $h_{ij}=[\gamma_{ij}^L,\gamma_{ij}^U]$,则决策信息构成区间犹豫模糊矩阵 $H=(h_{ij})_{m\times n}$。

模型步骤如下:

a)根据属性的特性对 $H=(h_{ij})_{m\times n}$ 进行标准化处理得到标准化区间犹豫模糊矩阵 $\tilde{H}=(\tilde{h}_{ij})_{m\times n}$

$$\tilde{h}_{ij}==\begin{cases}h_{ij} & G_j\text{为效益型属性}\\ h_{ij}^c & G_j\text{为成本型属性}\end{cases} \quad (17)$$

b)根据区间犹豫模糊决策矩阵 H 和属性权重向量 w,利用 IVHFWHM 算子(式(16))对方案 A_i 进行信息集成得到综合评价信息 $\tilde{h}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$。

c)通过 IVHFE 的得分函数分别计算方案 A_i 的得分函数 $s(\tilde{h}_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$。

d)根据步骤 b)中的得分函数 $s(\tilde{h}_i)$,由式(5)构造出可能度矩阵 $P=\left(p_{ij}\right)_{n\times n}$,并计算 $p_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij},i=1,2,\cdots,n$ 的大小来对 $s(\tilde{h}_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 进行大小排序。

e)根据得分函数 $s(\tilde{h}_i)$ 的排序对方案 A_i 进行优劣排序,选出最优的方案。

4　实例分析

随着社会现代化的快速发展,社会的生态环境维护也是发展中重要的一环,2016 年湖南省环保局以培育环境治理和生态保护市场为主体，加快推进生态环保领域供给侧结构性改革为主题。结合《湖南省“十三五”环境保护规划》,以全省生态环境质量明显改善，主要污染物排放总量大幅减少，环境风险得到有效控制，生态安全基本得到保障为目标。准备在全省范围内进行生态环保项目落地实施试点,第一批实施试点城市主要有长沙市 A_1,郴州市 A_2,湘潭市 A_3,岳阳市 A_4,常德市 A_5 等城市,在实施的过程中需要对项目方案地的实施风险阻力因素 G_1,空气质量因素 G_2,地表水质质量因素 G_3,城市功能区噪声因素 G_4 进行综合评估,由于在评估中,地表水质质量好的地方,空气质量也往往不错,同时城市功能区的噪声也会少很多,进而实施的风险系数就会降低。为了真实的刻画出评估专家的评价信息,决策属性值以 IVHFE 给出,其各评价属性的权重为 $w=(0.25,0.15,0.20,0.40)^T$。故区间犹豫模糊决策矩阵 $H=(h_{ij})_{m\times n}$ 如表 1 所示。

表 1　区间犹豫模糊矩阵 $H_{5\times 4}$

	G1	G2	G3	G4
A1	([0.2,0.3],[0.3,0.4])	([0.2,0.5])	([0.7,0.8],[0.8,0.9])	([0.4,0.5])
A2	([0.4,0.5],[0.5, 0.6])	([0.3,0.4],[0.6,0.7])	([0.3,0.4])	([0.5,0.6],[0.8,0.9])
A3	([0.5,0.7])	([0.2,0.3],[0.4,0.5])	([0.8,0.9],[0.9,1.0])	([0.3,0.5])
A4	([0.3,0.4],[0.7,0.8])	([0.1,0.3])	([0.6,0.7],[0.8,0.9])	([0.5,0.7])
A5	([0.2,0.3])	([0.4,0.6])	([0.2,0.3],[0.6,0.7])	([0.6,0.7])

具体决策过程如下,本文取 $p=1,q=1$

a)由于实施地的的实施风险阻力因素,空气质量因素,地表水质量因素,城市功能区噪声因素四种属性中,空气质量因素,地表水质量因素为效益型属性,实施风险阻力因素和城市功能区

噪声因素为成本型属性,所以通过式(17)对区间犹豫模糊矩阵 H 进行标准化处理。

b)利用 IVHFWHM 算子(式(16))对方案地 A_i 进行信息集成得到综合评价信息 $\tilde{h}_i(i=1,2,3,4,5)$,即

$$\tilde{h}_1 = IVHFWHM^{1,1}(h_{11},h_{12},h_{13},h_{14}) = \bigcup_{\gamma_1\in h_{11},\gamma_2\in h_{12},\gamma_3\in h_{13},\gamma_4\in h_{14}} \left\{ \begin{array}{l} \left[1-\prod_{i=1,j=i}^{4}\left(\left(1-((1-\gamma_i^L)^{w_i})((1-\gamma_j^L)^{w_j})\right)^{\frac{2}{20}}\right)^{\frac{1}{2}}, \right. \\ \left. 1-\prod_{i=1,j=i}^{4}\left(\left(1-((1-\gamma_i^U)^{w_i})((1-\gamma_j^U)^{w_j})\right)^{\frac{2}{20}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{array} \right\}$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_{11},\gamma_2\in h_{12},\gamma_3\in h_{13},\gamma_4\in h_{14}} \left\{ \begin{array}{l} [0.7063,0.7637],[0.7554,0.8278], \\ [0.9132,0.9341],[0.9469,0.9582] \end{array} \right\}$$

同理得到

$$\tilde{h}_2 = IVHFWHM^{1,1}(h_{21},h_{22},h_{23},h_{24})$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_{21},\gamma_2\in h_{22},\gamma_3\in h_{23},\gamma_4\in h_{24}} \left\{ \begin{array}{l} [0.7413,0.7819],[0.7933,0.8239], \\ [0.8623,0.8861],[0.9721,0.9802] \end{array} \right\}$$

$$\tilde{h}_3 = IVHFWHM^{1,1}(h_{31},h_{32},h_{33},h_{34})$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_{31},\gamma_2\in h_{32},\gamma_3\in h_{33},\gamma_4\in h_{34}} \left\{ \begin{array}{l} [0.7794,0.8481],[0.7765,0.8240], \\ [0.9263,0.9561],[0.9327,0.9582] \end{array} \right\}$$

$$\tilde{h}_4 = IVHFWHM^{1,1}(h_{41},h_{42},h_{43},h_{44})$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_{41},\gamma_2\in h_{42},\gamma_3\in h_{43},\gamma_4\in h_{44}} \left\{ \begin{array}{l} [0.7756,0.8213],[0.7288,0.8053], \\ [0.9109,0.9352],[0.9582,0.9762] \end{array} \right\}$$

$$\tilde{h}_5 = IVHFWHM^{1,1}(h_{51},h_{52},h_{53},h_{54})$$

$$=\bigcup_{\gamma_1\in h_{51},\gamma_2\in h_{52},\gamma_3\in h_{53},\gamma_4\in h_{54}} \left\{ \begin{array}{l} [0.6933,0.7471],[0.7871,0.8344], \\ [0.8750,0.8963],[0.9678,0.9762] \end{array} \right\}$$

c)通过 IVHFE 的得分函数(式(6))分别计算方案地 A_i 的得分函数分别为 $s(\tilde{h}_1)=[0.8304,0.8710]$, $s(\tilde{h}_2)=[0.8423,0.8680]$, $s(\tilde{h}_3)=[0.8537,0.8966]$, $s(\tilde{h}_4)=[0.8434,0.8845]$, $s(\tilde{h}_5)=[0.8308,0.8635]$ 。

d)根据步骤 b)中的得分函数 $s(\tilde{h}_i)$,由式(5)构造出可能度矩阵 $P=\left(p_{ij}\right)_{n\times n}$

$$P=\begin{pmatrix} 0.500 & 0.418 & 0.393 & 0.275 & 0.482 \\ 0.582 & 0.500 & 0.302 & 0.804 & 0.518 \\ 0.607 & 0.782 & 0.500 & 0.607 & 0.788 \\ 0.725 & 0.196 & 0.393 & 0.500 & 0.698 \\ 0.518 & 0.482 & 0.212 & 0.302 & 0.500 \end{pmatrix}$$

通过计算 $p_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}$ 的大小来对 $s(\tilde{h}_i)$ 进行排序为 $s(\tilde{h}_3)>s(\tilde{h}_4)>s(\tilde{h}_2)>s(\tilde{h}_5)>s(\tilde{h}_1)$ 。

e)根据步骤 d)中结果对试点方案地 A_i 进行优劣排序,通过 IVHFWHM 决策模型得到的各方案地的排序为:$A_3>A_4>A_2>A_5>A_1$,最优的试点方案地为 A_3。

对比分析文献[3]中的 IVHFWA 算子和 IVHFWG 算子,文献[4]中的 HIVFCOA 算子和 HIVFCOG 算子和文献[5]中的 IVHF ELECTRE 方法,得到各方案的排序结果如表 2 所示。

表 2 各方案排序结果表

决策算子或者方法	各试点方案地的排序
本文 IVHFWHM 算子	$A_3>A_4>A_2>A_5>A_1$
文献[3]中 IVHFWA 算子	$A_2>A_4>A_3>A_5>A_1$
文献 3]中 IVHFWG 算子	$A_2>A_3>A_4>A_5>A_1$
文献[5]中 IVHF ELECTRE 方法	$A_4>A_5>A_3>A_2>A_1$
文献[4]中 HIVFCOA 算子	$A_3>A_4>A_2>A_5>A_1$
文献[4]中 HIVFCOG 算子	$A_3>A_2>A_4>A_5>A_1$

通过对比分析知,文献[3]中的 IVHFWA 算子和 IVHFWG 算子得到的最优方案地为 A_2,文献[5]中的 IVHF ELECTRE 方法得到的最优方案地为 A_4,这和本文得出的最优方案地 A_3 不同,且各方案地的排序也稍有不同。文献[3]和文献[5]主要研究的是属性间独立的情况,暂未考虑输入属性间的相互关联性。然而在此生态环保项目试点方案地评估中,地表水质质量好的地方,空气质量也往往不错,同时城市功能区的噪声也会少很多,进而实施的风险系数就会降低,因此这些评价属性信息之间会存在相互的冗余,互补等关联关系,因此只有充分考虑属性间的相互关联性才能使得决策更加的合理。文献[4]中将 HIVFE 和模糊测度 Choquet 积分相结合,研究了 HIVFCOA 算子和 HIVFCOG 算子,这两个算子充分考虑了输入信息间的关联特性,因此得到的最优方案也为 A_3,但是 HIVFCOA 算子和 HIVFCOG 算子中的模糊测度具有一定的主观特性且求解过程较为复杂。综上,本文研究的 IVHFWHM 算子更加适合现实情况且可操作性强。

下面进一步分析 IVHFWHM 算子中参数 p,q 对信息融合结果的影响,设置参数 p,q 为不同的数值进行数值实验,实验结果见图 1 和 2 所示,当固定参数 q 时,各试点方案地的评估得分值随着参数 p 的变大而呈现逐渐变小的趋势,如图 1 所示。此时各试点方案地的优劣排序为:$A_3>A_4>A_2>A_5>A_1$,最优试点方案地为 A_3。当固定参数 p 时,各试点方案地的评估得分值随着参数 q 的变大而呈现逐渐变小的趋势,如图 2 所示。当 $q\in[1,2]\cup[8,10]$ 时,试点方案地郴州市,湘潭市,岳阳市,常德市的优劣顺序发生稍微的变化,但是综合各试点方案地属性得分函数值,各试点方案地的优劣排序为:$A_3>A_4>A_2>A_5>A_1$,最优试点方案地为 A_3。综上,在现实决策中,评价属性信息会存在相互的冗余,互补等关联关系,因此只有充分考虑属性间的关联性才能使得决策更加的合理。因此,本文研究的 IVHFWHM 算子更加适合现实情况且可操作性强。

5 结束语

社会信息化的不断发展使得 MADM 问题的决策难度越来越大,决策专家在决策时容易受到经验和知识水平的限制,给出的决策属性之间一般存在关联特性,如综合选择一个试点方案地优劣的决策属性中有试点方案地的空气质量水平和地表水质量和城市功能区噪声的污染程度,一般来说空气质量优和地表

水质量优的城市,其噪声的污染程度也会相对低一些。因此考虑属性间相互关联的信息融合算子显然更符合决策实际。为了弥补现有的 IVHFS 信息集结算子仅在属性相互独立情况下有效的不足,本文结合 HM 算子,研究 IVHFHM 算子和 IVHFWHM 算子,建立基于 IVHFWHM 算子的决策模型,并应用在生态环境项目试点方案地评估选择问题中,结果证明了本文研究的新型决策算法的正确性。该新型决策算法很好的消除决策属性间关联性对决策结果的影响,使决策结果更真实可信,为解决 MADM 问题提供了新途径。

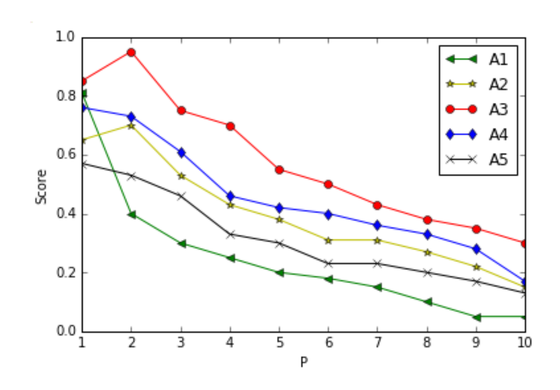


图 1　五个试点方案地的得分函数值随参数 p 的变化趋势图

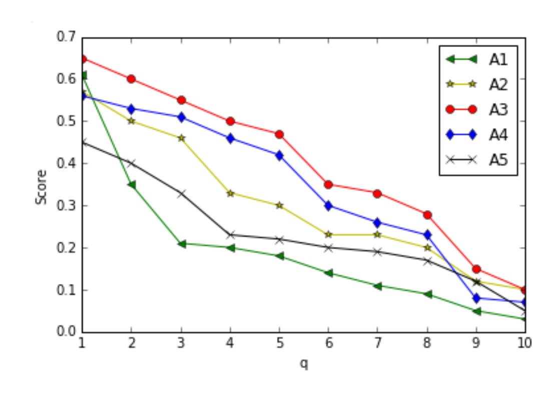


图 2　五个试点方案地的得分函数值随参数 q 的变化趋势图

参考文献:

[1] Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision [C]// Proc of the 18th IEEE International Conference Fuzzy Systems. 2009: 1378-1382.

[2] Torra V. Hesitant fuzzy sets [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25 (6): 529-539.

[3] Chen N, Xu Z S, Xia M M. Interval-valued hesitant preference relations and their application to group decision making [J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37 (22): 528-540.

[4] Wei G W, Zhao X F, Lin R. Some hesitant interval-valued fuzzy aggregation operators and their applications to multiple attribute decision making [J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 46 (12): 43–53.

[5] 于倩, 侯福均, 翟玉冰, 等. 区间犹豫模糊 ELECTRE 多属性决策方法及应用 [J]. 运筹与管理, 2015, 24 (6): 16-24.

[6] 周晓辉, 姚俭. 区间直觉梯形模糊几何 Heronian 平均算子及应用 [J]. 计算机工程与应用, 2016, 52 (9): 39-43.

[7] Beliakov G, Pradera A, Calvo T. Aggregation functions: a guide for practitioners [M]. Berlin: Springer, 2007.

[8] Sykora S. Mathematical means and average: generalized heronian means [J]. Sykora S Stan's, Library, 2009.

[9] Sykora S. Generalized Heronian Means II [M]. Sykora S Stan's, Library, 2009.

[10] Liu H Z, Pei D W. HOWA operator and its application to multi-attribute decision making [J]. Journal of Zhejiang Sci-Tech University, 2012, 25: 138-142.

[11] 于倩, 侯福均. 犹豫模糊语言 Heronian 平均算子在多属性决策中的应用 [J]. 运筹与管理, 2016, 25 (2): 90-97.

[12] 王晓楠, 巨永锋, 高婷. 基于犹豫模糊 H-平均的交通流模型选择方法 [J]. 计算机工程与应用, http://kns. cnki. net/kcms/detail/11. 2127. TP. 20170313. 1638. 002. html.

[13] 周晓辉, 姚俭, 徐磊, 等. 区间直觉模糊几何 Heronian 平均算子及其应用 [J]. 系统工程, 2016, 34 (4): 140-146.

[14] 林显宁. 基于犹豫语言 H-几何算子的信息安全系统选择 [J]. 计算机工程与应用, 2017, 53 (13): 174-180.

[15] Xia M M, Xu Z S. Hesitant fuzzy information aggregationin decision making [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2011, 52 (3): 395-407.

[16] Xu Z S, Da Q L. The uncertain OWA operator [J]. International Journal of Intelligence System, 2002, 23 (17): 699-575.